Quarta parte

IL TERZO EFFETTO RELATIVISTICO

PREMESSA

Le velocità in gioco nella Meccanica atomica sono molto minori della velocità della luce, quindi gli effetti relativistici sono poco considerati. A questa scala le lunghezze d'onda sono confrontabili con le dimensioni atomiche, per conseguenza prevalgono i fenomeni quantistici. Si è venuta così a creare una frattura fra il nostro *mondo macroscopico* in cui vale il principio di causalità, ed il *mondo microscopico* delle particelle elementari in cui vale il principio di indeterminazione.

Tuttavia non conosciamo nessuna giustificazione convincente di questa frattura, e infatti non esiste una separazione precisa fra i due *mondi*. I fisici scelgono la teoria più opportuna secondo criteri di convenienza per ottenere il risultato migliore, o il calcolo più semplice, o altro. Molti ritengono insoddisfacente questa situazione, citiamo per tutti l'opinione di Dirac, tratta dalla conferenza del 1968 al Centro Internazionale di Fisica teorica di Trieste:

> "*Si continuano a usare regole che funzionano e non un regolare apparato matematico. Oggi la maggior parte dei fisici teorici sembrano soddisfatti di questa situazione. Io credo invece che, con tali sviluppi, la fisica abbia imboccato una via sbagliata e che non si dovrebbe esserne soddisfatti*."

Non sappiamo se e quando la revisione auspicata da Dirac sarà compiuta, è improbabile che la soluzione di problemi fondamentali possa venire da espressioni matematicamente semplici come le trasformazioni di Lorentz, ben note e lungamente studiate da oltre un secolo. Tuttavia abbiamo buone ragioni per ritenere che questa auspicata revisione sarà strettamente connessa ai principi fondamentali della Relatività, in ultima analisi alle proprietà elettromagnetiche dello *spazio-tempo fisico*.

URTO TOTALMENTE ANELASTICO

Per conoscere i parametri del moto occorre che l'oggetto fisico (particella) ceda tutta o parte della sua energia ad un elemento rivelatore, che può essere per es. una lastra fotografica. Possiamo paragonare questo processo alla caduta di un granello di zucchero dentro una grande vasca piena di marmellata. Evidentemente il granello di zucchero scompare nella vasca mentre la marmellata rimane immobile. Questo è molto simile a ciò che avviene nella rivelazione di particelle mediante emulsione fotografica.

La Fisica definisce questo processo come *urto totalmente anelastico* contro un bersaglio stazionario di massa infinita. Nell'urto totalmente anelastico gli oggetti rimangono legati insieme, o meglio si fondono in uno solo. Consideriamo gli oggetti A e B di masse m_A e m_B, che si corrono incontro rispettivamente con velocità u_A e u_B. Nell'urto totalmente anelastico le quantità di moto sono trasferite all'oggetto risultante dalla fusione, che classicamente acquista la velocità:

$$u_o = (m_A\, u_A + m_B\, u_B)/(m_A + m_B).$$

Se l'oggetto B è fermo ($u_B = 0$), e rispetto all'altro ha massa praticamente infinita ($m_B = \infty$), dopo l'urto si ha $u_o = 0$. Analizzeremo questo processo quantificando le variazioni dei parametri associati al moto della particella. Prima dell'urto abbiamo:

quantità di moto: $p = m\,u\gamma$;

energia totale: $E = mc^2\gamma = T + E_o$.

Nell'impatto tutta l'energia cinetica si trasforma in calore, energia chimica o altro. Dopo l'urto abbiamo $u_o = 0$, quindi i parametri sono:

$$p_o = 0, \qquad E_o = mc^2.$$

Per l'osservatore stazionario la particella ha ceduto le quantità:

$$\Delta p = p - p_o = m\,u\gamma, \qquad \Delta E = E - E_o = mc^2(\gamma - 1).$$

Per l'osservatore che si muove con velocità U, prima dell'impatto abbiamo:

$$p' = m\,u'\gamma'; \qquad E' = mc^2\gamma'.$$

Essendo $\quad u'\gamma' = \gamma\Gamma\,(u - U), \qquad \gamma' = \gamma\Gamma\,(1 - uU/c^2),$

si ricava:

$$p' = \Gamma\left(p - \frac{U}{c^2}E\right); \qquad E' = \Gamma\,\left(E - Up\right).$$

Dopo l'impatto abbiamo:

$$p'_o = \Gamma\left(p_o - \frac{U}{c^2}E_o\right) = -\,mU\,\Gamma;$$

$$E'_o = \Gamma(E_o - U\,p_o) = \Gamma\,E_o.$$

Ricaviamo le quantità: $\Delta p' = p' - p'_o$ e $\Delta E' = E' - E'_o$:

$$\Delta p' = \Gamma\left[\left(p - \frac{U}{c^2}E\right) - \left(p_o - \frac{U}{c^2}E_o\right)\right] = \Gamma\left(\Delta p - \frac{U}{c^2}\Delta E\right).$$

$$\Delta E' = \Gamma\,[(E - U\,p) - (E_o - U\,p_o)] = \Gamma\,(\Delta E - U\,\Delta p).$$

Riassumendo le trasformazioni di Δp e ΔE sono:

$$\boxed{\Delta p' = \Gamma\left(\Delta p - \frac{U}{c^2}\Delta E\right); \qquad \Delta E' = \Gamma\left(\Delta E - U\Delta p\right).}$$

È evidente che le trasformazioni di questi parametri hanno la stessa forma delle trasformazioni di Lorentz.

Quantitativamente risulta $\Delta p = p$ e $\Delta E = T$, ma queste quantità sono fisicamente differenti, infatti p e T si riferiscono allo stato fisico della particella prima dell'impatto, mentre Δp e ΔE sono quantità che la particella ha ceduto al bersaglio nell'impatto. La differenza risulta evidente considerando le trasformazioni $\Delta p' \neq p'$ e $\Delta E' \neq T'$. Per es. se osservatore e particella hanno la stessa velocità ($U = u$), risulta:

$$T' = E' - E_o = \Gamma (E - U p) - E_o = \gamma (mc^2 \gamma - m u^2 \gamma) - mc^2 =$$

$$= mc^2 \gamma^2 (1 - u^2/c^2) - mc^2 = 0.$$

Essendo $U = u$ la quantità T' risulta ovviamente nulla.
Nello stesso caso ($U = u$) abbiamo:

$$\Delta E' = \Gamma (\Delta E - U \Delta p) = \gamma [mc^2 (\gamma - 1) - m u^2 \gamma] =$$

$$= mc^2 [\gamma (\gamma - 1) - \gamma^2 u^2/ c^2] = mc^2 [\gamma^2 (1 - u^2/ c^2) - \gamma] =$$

$$= - mc^2 (\gamma - 1) = - T.$$

Vediamo che $T = \Delta E$, mentre $T' \neq \Delta E'$. Il segno negativo della quantità $\Delta E' = -T$ significa che per l'osservatore solidale la particella non *cede* ma *riceve* energia dal bersaglio.
Le trasformazioni dell'impulso sono:

$$p' = \Gamma \left(p - \frac{U}{c^2} E \right) = \gamma (mu\gamma - m u \gamma) = 0.$$

$$\Delta p' = \Gamma \left(\Delta p - \frac{U}{c^2} \Delta E \right) = \gamma [mu\gamma - m u (\gamma - 1)] = mu\gamma.$$

Il segno di $\Delta p'$ è positivo perché l'impulso ricevuto dal bersaglio è in direzione opposta rispetto al moto dell'osservatore solidale.

CONDIZIONE DI MINIMA VARIAZIONE

Abbiamo visto che per l'osservatore stazionario la particella cede nell'urto l'energia $\Delta E = T$, mentre per l'osservatore solidale risulta che la particella riceve energia dal bersaglio. Prima dell'impatto l'osservatore stazionario vede la particella correre con velocità u, mentre l'osservatore solidale la vede ferma; l'osservatore stazionario vede la particella arrestarsi nell'impatto contro il bersaglio, mentre per l'osservatore solidale inizia a correre insieme al bersaglio con velocità $-u$.

Lo stesso fatto fisico viene percepito in due modi opposti a causa del moto dell'osservatore, allora deve esistere una velocità U_μ per cui risulta nell'urto la particella non cede né riceve energia dal bersaglio, e quindi risulta minima la variazione dell'energia della particella dovuta all'impatto. La velocità U_μ si ricava ponendo la condizione $\Delta E' = 0$:

$$\Delta E' = \Gamma(\Delta E - U_\mu \, \Delta p) = 0.$$

$$U_\mu = \Delta E / \Delta p.$$

Essendo $\Delta E = mc^2(\gamma - 1)$, $\Delta p = mu\gamma$, e $c^2(\gamma^2 - 1) = u^2\gamma^2$, abbiamo:

$$\boxed{U_\mu = \frac{\Delta E}{\Delta p} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{mu\gamma} = \frac{u}{1 + 1/\gamma}}$$

Questa situazione si verifica quando le velocità della particella prima e dopo l'impatto risultano uguali ma in direzioni opposte. Vedremo che la velocità U_μ ha un ruolo fondamentale nei fenomeni di propagazione ondulatoria che si manifestano nel vuoto.

TRASFORMAZIONE GENERALE DELL'ENERGIA

Dall'ultima relazione ricaviamo $\Delta p = \Delta E \dfrac{1+1/\gamma}{u}$ che si sostituisce nella trasformazione dell'energia $\Delta E' = \Gamma(\Delta E - U\,\Delta p)$, ed abbiamo:

$$\Delta E' = \Gamma \Delta E \left[1 - \frac{U}{u}\left(1 + 1/\gamma\right)\right].$$

Questa espressione inedita è la *trasformazione generale dell'energia* che la particella cede urtando con velocità u il bersaglio stazionario, vista da un osservatore che si muove con velocità U. Esplicitiamo i fattori di Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{e} \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-U^2/c^2}} \;:$$

$$\boxed{\Delta E' = \Delta E \,\frac{1 - \dfrac{U}{u}\left(1+\sqrt{1-u^2/c^2}\right)}{\sqrt{1-U^2/c^2}}}$$

Questa vale per qualsiasi velocità $u \le c$. Per i fotoni si sostituisce $u = c$, $\Delta E \to W$ e $\Delta E' \to W'$:

$$W' = W\sqrt{\frac{1-U/c}{1+U/c}}\,.$$

Abbiamo ottenuto la notissima trasformazione di Einstein dell'energia elettromagnetica. La *trasformazione generale dell'energia* vale per qualsiasi oggetto fisico, siano particelle materiali o fotoni. L'espressione di Einstein risulta essere un caso particolare di questa inedita relazione.

CONDIZIONE DI MINIMA FREQUENZA VELOCITÀ DI FASE

La legge di Planck ($W=\hbar\,\omega$) mette in relazione la quantità di energia elettromagnetica W con la frequenza angolare ω della radiazione. Il fattore di proporzionalità è la costante di Planck ridotta $\hbar = h/2\pi$.

Poiché la *trasformazione generale dell'energia* vale sia per l'energia ΔE, sia per l'energia W, ammetteremo (per assioma) che la legge di Planck sia riferibile ad entrambe, e valga quindi anche la relazione $\Delta E = \hbar\,\omega$. Questo ci consente di applicare anche al moto degli oggetti materiali gli stessi concetti che valgono in generale per la propagazione delle onde. Facciamo riferimento in particolare all'effetto Doppler, che si manifesta quando l'osservatore si muove rispetto alla sorgente sonora. Ricordiamo brevemente che se la sorgente emette la frequenza ω, l'osservatore che si allontana percepisce una frequenza più bassa $\omega' < \omega$, che si annulla quando l'osservatore ha esattamente la stessa velocità del fronte d'onda. Questa si definisce *velocità di fase* V_f, e corrisponde per es. alla velocità delle creste delle onde sull'acqua. Applichiamo all'espressione $\omega = \Delta E/\hbar$, la condizione che la frequenza percepita sia minima ($\omega' = 0$)

$$\hbar\,\omega' = \Delta E' = \Gamma(\Delta E - V_f\,\Delta p) = 0\ .$$

Troviamo che la condizione di *minima frequenza* coincide con quella di *minima variazione*, infatti la *velocità di fase* risulta :

$$V_f = U_\mu = u/(\,1 + 1/\gamma)\ .$$

Questo risultato prova che la velocità U_μ ricavata dalla *condizione di minima variazione* ha le proprietà di una velocità di fase. Per motivi di simmetria che vedremo nel seguito, useremo la notazione col pedice ($_\phi$), quindi per la velocità di fase abbiamo il simbolo V_ϕ e per la frequenza $\omega_\phi = \Delta E/\hbar$.

COVARIANZA

Il concetto di *invarianza* si riferisce al fatto che il <u>modulo del vettore</u> non cambia rispetto al cambiamento del sistema di riferimento. Questo non vale per le leggi fisiche, per le quali si fa riferimento alla *forma covariante*. La covarianza di $\omega_\phi = \Delta E/\hbar$ e $k_\phi = \Delta p/\hbar$ deriva dal fatto che $\Delta E'$ e $\Delta p'$ sono le trasformazioni di Lorentz di ΔE e Δp. Ricordiamo che:

$$\Delta p = mu\gamma, \qquad \Delta E = mc^2(\gamma - 1).$$

$$\Delta p' = \Gamma\left(\Delta p - \frac{U}{c^2}\Delta E\right), \qquad \Delta E' = \Gamma\,[\Delta E - U\,\Delta p].$$

Essendo il *quadri-momento operazionale* $\mathbf{P}\left[m\,\mathrm{u}\gamma;\ \frac{i}{c}mc^2(\gamma - 1)\right]$

possiamo scrivere:

$$\mathbf{P}\left(\Delta p\,;\ \frac{i}{c}\Delta E\right); \qquad \mathbf{P}'\left(\Delta p';\ \frac{i}{c}\Delta E'\right).$$

$$\mathbf{P}'\left[\Gamma\left(\Delta p - \frac{U}{c^2}\Delta E\right);\ \frac{i}{c}\Gamma\left(\Delta E - U\Delta p\right)\right].$$

Vediamo che le componenti di $\mathbf{P}$ si trasformano esattamente come le quantità Δp e ΔE, secondo la stessa forma delle trasformazioni di Lorentz. Da queste si ottiene il <u>*quadrivettore d'onda operazionale*</u>:

$$\mathbf{P}/\hbar \equiv \mathbf{K}\left(\mathbf{k}_\phi;\ \frac{i}{c}\omega_\phi\right).$$

Ovviamente per il fotone abbiamo $k_E = W/c\,\hbar$ e $\omega_E = W/\hbar$.

INVARIANZA DI FASE

Si definisce *invarianza di fase* una notevole proprietà dell'onda progressiva, dalla quale si ricava un importante criterio di verifica che vale come la "prova del nove" nell'aritmetica elementare. L'espressione analitica della fase è $\phi = (\mathbf{k}x - \omega t)$, dove $\mathbf{k}$ e ω sono rispettivamente vettore d'onda e frequenza. Verifichiamo la condizione di invarianza di fase $\phi' = \phi$ per i *parametri operazionali* ω_ϕ e k_ϕ:

$$\phi' = (k')_\phi\, x' - (\omega')_\phi\, t' = x' \frac{\Delta p'}{\hbar} - t' \frac{\Delta E'}{\hbar} =$$

$$= \frac{\Gamma^2}{\hbar}\left[(x - U\,t)\left(\Delta p - \frac{U}{c^2}\Delta E \right) - \left(t - \frac{U}{c^2}x \right)(\Delta E - U\Delta p) \right] =$$

$$= \frac{\Gamma^2}{\hbar}\left[x\,\Delta p \left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right) - t\,\Delta E \left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right) \right] = x\frac{\Delta p}{\hbar} - t\frac{\Delta E}{\hbar} =$$

$$= k_\phi\, x - \omega_\phi\, t = \phi.$$

Con questo abbiamo provato l'*invarianza di fase* dell'onda progressiva definita dai *parametri operazionali* $\omega_\phi = \Delta E/\hbar$ e $k_\phi = \Delta p/\hbar$.

VELOCITÀ DI DISPERSIONE

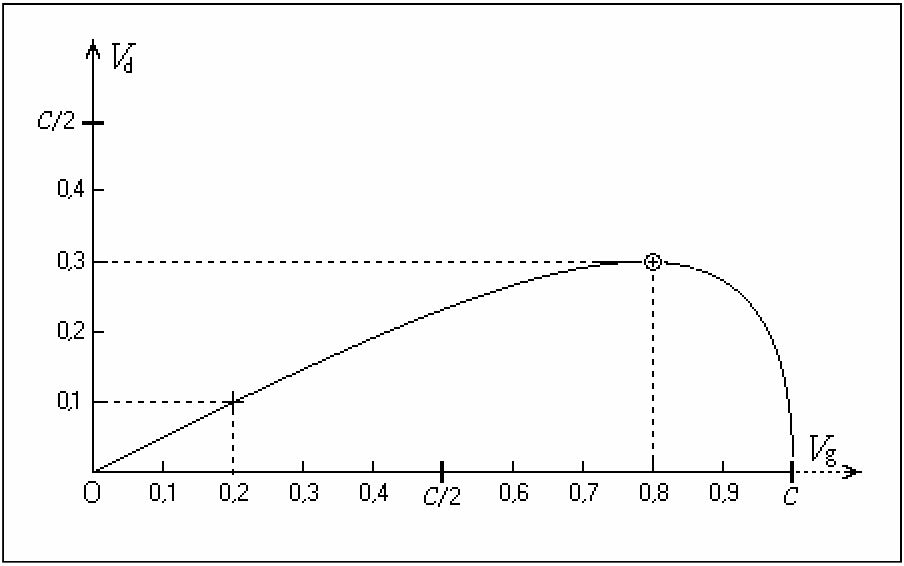
Dopo la verifica dell'invarianza di fase vediamo brevemente il concetto di *dispersione*. Il formalismo è semplice, ma il significato fisico è notevole. Se il rapporto ω/k è costante anche $d\omega/dk$ ha lo stesso valore, ciò significa che le velocità di fase e di gruppo sono uguali. Se il rapporto ω/k non è costante abbiamo $V_f \neq V_g$, tecnicamente si dice che c'è *dispersione*.

Questo breve saggio non consente di sviluppare oltre questo importante argomento, il lettore interessato non avrà difficoltà ad approfondirlo per suo conto. Procediamo dunque nella nostra analisi.

Definiamo *velocità di dispersione* l a differenza:

$$V_{\mathrm{d}} = V_{\mathrm{g}} - V_{\phi} = u - \frac{u}{1 + 1/\gamma} = \frac{u}{\gamma + 1} = V_{\phi}/\gamma .$$

Il grafico di questo parametro ricorda vagamente la testa del capodoglio.



Nella prima parte (non-relativistica) la velocità di dispersione cresce quasi linearmente $(V_{\mathrm{d}} \cong u/2)$ fino a circa $0{,}1\,c$, quando la velocità della particella è $u = 0{,}2\,c$. Si rileva un massimo di $0{,}3\,c$ per $u = 0{,}8\,c$, dopo il quale la curva tende di nuovo rapidamente a 0. Per $u < c$ abbiamo $V_{\phi} < V_{\mathrm{g}}$, quindi per la particella che si muove vi è sempre dispersione anche nel vuoto.

La dispersione diventa molto piccola quando la velocità è vicina a quella della luce. Nei grandi acceleratori la velocità delle particelle è molto vicina a quella della luce, quindi le particelle viaggiano praticamente senza dispersione.

SIMMETRIA RELATIVISTICA

Il principio fondamentale della Relatività è l'equivalenza fisica di tutti i sistemi inerziali, per cui dal punto di vista fisico vi è completa simmetria fra i riferimenti S ed S'. Come conseguenza si può affermare che:

> *se dal sistema S risulta che il tempo su S' rallenta di una certa misura, da S' risulta che il tempo su S rallenta nella stessa misura*; *allora vi sarà un luogo S_φ per il quale risulta che i tempi su S ed S' trascorrono allo stesso modo.*

Affinché avvenga questo i fattori di Lorentz rispetto ad S ed S' devono essere uguali, quindi abbiamo la condizione:

$$\Gamma_\varphi = (\Gamma_\varphi)' = \gamma \Gamma_\varphi \, (1 - uV_\varphi / c^2) \,.$$

Da questa si ricava:

$$1 = \gamma(1 - uV_\varphi \, / c^2) \quad \Rightarrow \quad V_\varphi = \frac{c^2(\gamma - 1)}{u\gamma} = \frac{u}{1 + 1/\gamma} \,.$$

Il luogo dei punti in condizione di simmetria relativistica è una superficie piana parallela al piano Y Z, che si muove nella direzione dell'asse X con velocità V_φ. Il lettore verifichi che ottiene lo stesso risultato dalla condizione $t_\varphi = t'_\varphi$.

La velocità di fase V_ϕ ricavata dalla *trasformazione generale dell'energia* coincide con la velocità V_φ ricavata dalla condizione di simmetria relativistica. Questo prova che <u>la prima origine dei fenomeni ondulatori nel vuoto è relativistica</u>. Infatti possiamo ricavare gli altri parametri ondulatori correlati alla velocità V_φ ponendo le seguenti condizioni:

1. la frequenza ω_φ si deve annullare per $u = 0$;
2. la frequenza ω_φ, essendo l'inverso di un tempo, deve essere funzione lineare del fattore di Lorentz del tipo $\omega_\varphi = a\gamma + b$, dove a e b sono da determinare.

Da queste due condizioni abbiamo:

$$b = -a \quad \Rightarrow \quad \omega_\varphi = a(\gamma - 1).$$

Il parametro ω_φ risulta compatibile con la frequenza ω_ϕ :

$$\omega_\phi = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar}(\gamma - 1) = a(\gamma - 1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mc^2}{\hbar}.$$

Dalla relazione $V_f = \omega / k$ si ottiene di nuovo il numero d'onda :

$$k_\phi = \frac{\omega_\phi}{V_\phi} = \frac{\Delta p}{\hbar}$$

Abbiamo visto che i *parametri ondulatori operazionali* ricavati dalla *trasformazione generale dell'energia* sono conseguenza diretta della legge di Planck e del principio di simmetria relativistica. Da questo deriva la notazione unificata col pedice ($_\phi$).

IL TERZO EFFETTO RELATIVISTICO

I *parametri ondulatori operazionali* sono riferibili al moto di tutti gli oggetti fisici, particelle materiali e fotoni, questo indica che:

> *il moto di ogni oggetto che si muove appare all'osservatore con caratteristiche di onda progressiva.*

Questa proprietà del moto è del tutto inedita, e si deve interpretare come *terzo effetto relativistico*, dopo la *contrazione delle lunghezze* e la *dilatazione del tempo*. Tutti gli effetti relativistici hanno in comune tre peculiarità:

- si ricavano direttamente dalle trasformazioni di Lorentz;
- derivano dal moto relativo rispetto all'osservatore;
- sono indipendenti dalle caratteristiche fisiche dell'oggetto osservato.

Per conseguenza si deve concludere che:

- 1 - *il moto possiede intrinsecamente proprietà ondulatorie che non derivano dalla natura delle particelle, ma da una proprietà dello spazio-tempo fisico.*

- 2 - *le onde elettromagnetiche ed i fenomeni ondulatori connessi a particelle materiali sono manifestazioni del terzo effetto relativistico.*

In sintesi risulta che tutti i fenomeni di natura ondulatoria che si manifestano nel vuoto hanno una comune origine elettromagnetica, tuttavia questo è ancora troppo vago e indeterminato. In particolare l'espressione "*il moto possiede intrinsecamente proprietà ondulatorie*" non chiarisce quale sia l'elemento fisico a cui riferire i *parametri ondulatori*. Anche assumendo che si tratta di una *proprietà intrinseca dello spazio-tempo*, occorre stabilire esattamente quale sia in questo caso l'oggetto del *Principio operazionale*.

Nelle onde elastiche è chiaro che questo elemento è l'energia meccanica che si propaga in forma ondulatoria. Per le onde elettromagnetiche non vi è mezzo di propagazione, quindi è ancora più evidente che si deve fare riferimento all'energia elettromagnetica che si propaga nel vuoto. Seguendo la stessa linea di pensiero anche per le particelle materiali, si devono attribuire caratteristiche ondulatorie all'energia che dà luogo alle figure di diffrazione, cioè all'energia cinetica delle particelle che si distribuisce sulla lastra fotografica.

Questo porta a concepire l'energia cinetica in modo molto concreto, simile all'idea che normalmente abbiamo della luce, ma dobbiamo superare la difficoltà psicologica che deriva dalla nostra esperienza. Quando ci colpisce una pietra vediamo la pietra e non pensiamo alla sua energia cinetica, invece quando un raggio luminoso colpisce i nostri occhi, non vediamo oggetti materiali che si muovono, ed è naturale attribuire realtà concreta all'energia luminosa.

Anche su questo è necessario affidarsi al *Principio operazionale* per eliminare dal nostro ragionamento elementi psicologici derivanti dalla nostra esperienza, introdotti inavvertitamente senza giustificazione.

lucio.f.ossino@tiscali.it

Prima edizione luglio 2009.